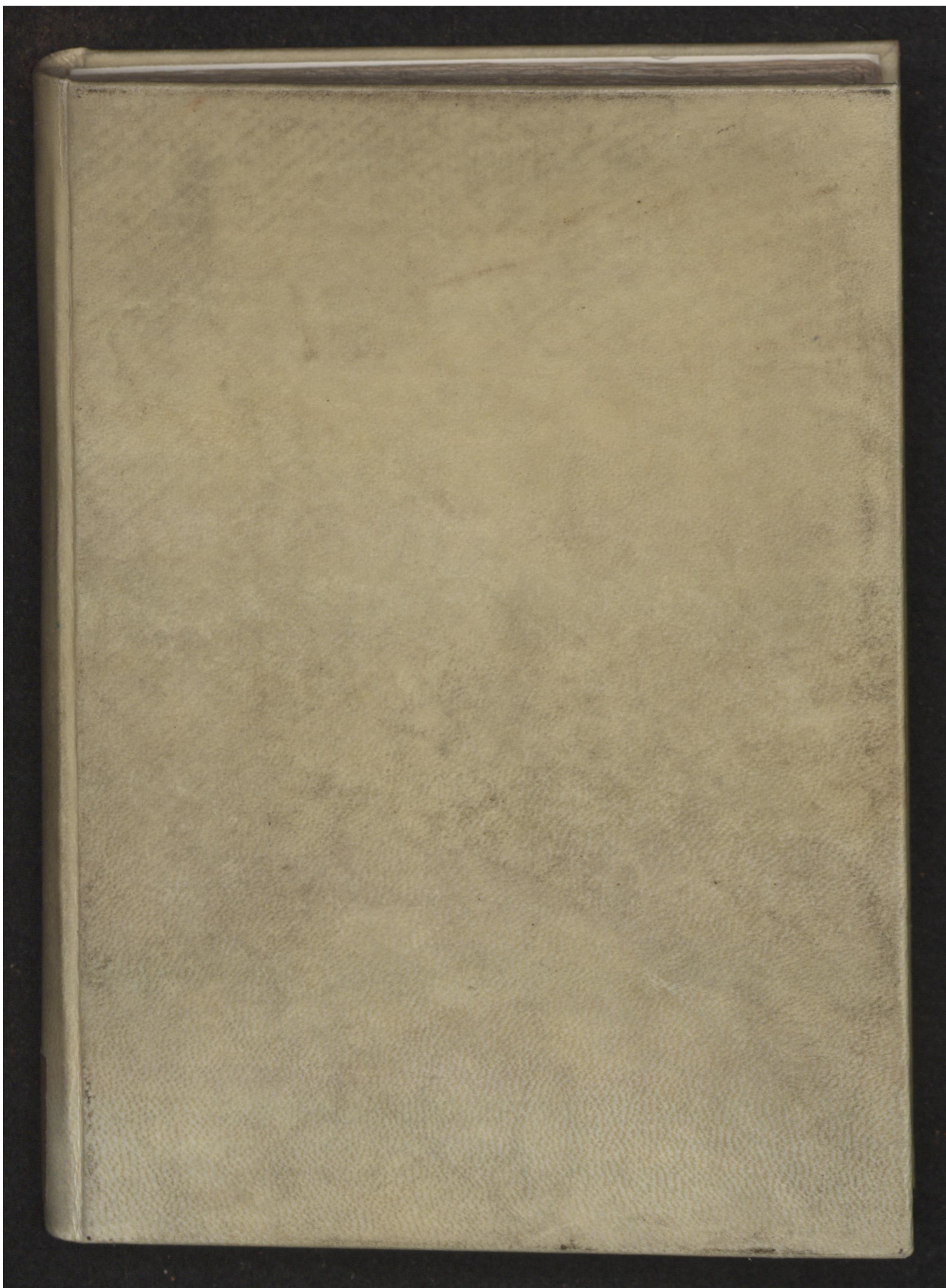
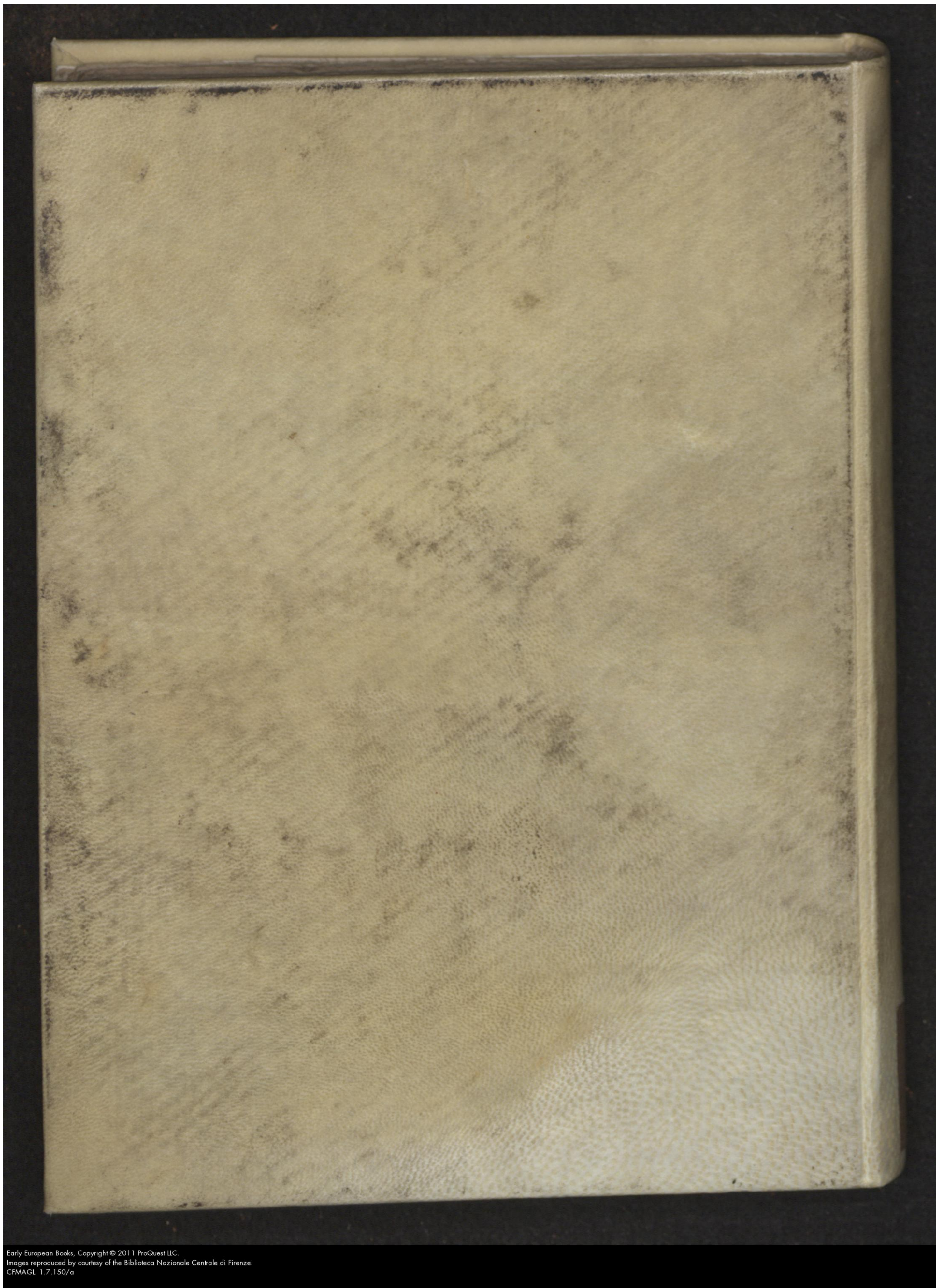


Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.150/a


Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.150/a


Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a

152

EXERCITATIONES GEOMETRICÆ:

A

JACOBO GREGORIO, Scoto,
è R. Societate.

LONDINI,

Typis *Guilielmi Godbid*, & Impensis *Mosis Pitt* Bibliopolæ, in vico vulgò vocato *Little Britain*.
Anno M. DC. LXVIII.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.150/b



Præfatio.

TAnta eſt in ratiocinio Mathematico certitudo & evidentia, ut eo ritè conſiderato nihil non audeant etiam Viri modeſtiſſimi: ſi tamen magni quid tentaverint, adeo innata eſt humano generi invidia & æmulatio, ut generalis quaſi fiat conſenſus, illos ludibrio exponendi: eorum enim inventa (etiamſi veriſſima) à prorſus ignaris deridentur, à ſciolis vel ſurripiuntur vel rejiciuntur, & à verè doctis (quorum judicio & authoritati talia ſubmittuntur) neglecta manent. Imo non deſunt, qui, ejuſdem inventi partem ignobiliorem, aliis quippe approbatam, ſibi arrogant, & reliqua longè ſubtiliora non ſine famæ ſuæ jacturâ faſtuosè reji-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

ciunt; responsa interim spernunt, præclarius existimantes, infallibiles haberi apud ignaros, quàm ingenui apud doctos : O cœca famæ libido, quæ homines ita dementat, ut omniscii apparere satagant! Non carent hoc communi fato nostræ de circulo & hyperbolâ lucubrationes, quas à paucissimis video vel intelligi vel examinatu dignas æstimari : Censores enim plerique scriptorum potius famam quàm rationes considerant; nam adeo arridet hominibus authoritas, ut nihil novi (quod alicujus momenti sit) à novis authoribus inveniri credant. Ego tam iniquis censuris stimulatus, hisce exercitationibus conabor ostendere, etiam in rebus Mathematicis maximè obviis & usui humano necessariis, non pauca esse quæ subtilissimos Geometras hucusque latuerunt; atque ita fortasse de aliis nostris speculationibus minùs rigidè judicabitur. Quæ interim objiciuntur à præstantissimo Geometra contra nostram Doctrinam, hic resolvere conabor. *Admitto* (inquit) *in Prop*, 11 *Demonstratum esse, quod Sector A B I P non sit analyticè compositus à triangulo A B P & Trapezio A B F P; sed non video ubi demonstretur Sectorem A B I P non esse analyticè*

lyticè compoſitum ex aliis quantitatibus. Ego facilè agnoſco infinitas alias eſſe quantitates, è quibus analyticè componitur Sector A B I P, ſed R. Virum interrogo, quomodo innoteſcant illæ quantitates è datis ſolummodo triangulo A B P & Trapezio A B F P, nam hæ Problema determinant, & proinde aliæ fruſtra dantur : ſi autem inveniantur ; inveniuntur vel analyticè vel non analyticè ; ſi poſterius, concedo totum ; ſi autem analyticè inveniantur è quantitatibus A B C, A B F P, & Sector rurſus analyticè componatur ex illis ; Idem Sector etiam analyticè componetur ex quantitatibus A B P, A B F P, quod eſt abſurdum, nempe contra Prop. 11, quæ admittitur. Si antem inſiſtatur, Sectorem poſſe componi analyticè ex aliis quantitatibus, quæ illum determinant præter A B P, A B F P : dico A B P, A B F P, vel poſſe componi analyticè ex aliis illis quantitatibus vel non ; ſi poſterius, concedo totum, ſed tales quantitates exhiberi deſidero ; ſi prius, Analyſeos tenorem examinando, ſatis conſtabit alias illas quantitates etiam analyticè componi ex A B P, A B F P, & ita ad primum caſum relabimur. Satis etiam ſciunt Geometræ, perinde eſſe

quo-

quo ad ſolutionem, quomodocunque determinetur problema; ſi igitur ſolutio analytica ſit impoſſibilis ex quantitatibus ABP, ABFP, illud determinantibus; impoſſibilis etiam erit ex aliis, quæ analyticè exhiberi poſſunt. Exiſtimabam duas noſtras petitiones unà cum ſcholio Prop. 11. huic dubio ſatisfeciſſe; ſed fateor humeris meis onus impar, nova principia (etiamſi intellectui claro & exercitato evidentiſſima) ita ſtabilire, ut unicuique ſatisfiat. Poſſem aliis objectionibus hic reſpondere, quæ me anxium tenebant, dum hæc primò mente revolverem; ſed animadverto objectiones Mathematicas cuilibet præter Authorem proprium frivolas apparere. In Epiſtola *veræ Circ. & Hyperb. quadraturæ* pag. 5. Agnoſco me totum inſtitutum ad puram Geometriam non reduxiſſe, quoniam robur principalis prop. nempe 11. dependet tantùm ex Canonibus analyticis; adeo certa tamen eſt, ut, eâ vacillante, neceſſario corruat tota Analyſis: at in reliquis omnibus exiſtimo me rigoroſè ſatiſfeciſſe. Si autem quis velit rigore Geometrico prop. 11. demonſtrare; poterit fortaſſe in inſtitutum aſſequi hac ratione. Demonſtretur primo

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

mò hæc notio incommenſurabilitas: Si fuerint duæ vel plures quantitates inter ſe commenſurabiles, & quædam alia, quæ ex illarum Additione, Subductione, Multiplicatione, Diviſione, non poteſt componi; erit illa alia quantitas prioribus incommenſurabilis, & vice verſâ: deinde ex hac notione deducatur univerſalis doctrina incommenſurabilitatis; quæ erit non ſolùm analoga huic doctrinæ non analyticæ, ſed illi etiam viam ſternet.

Errata

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.150/b

Errata quæ ſenſum perturbant ſic corriguntur.

Pag. 12. L. 11. pro $\frac{1}{4}$ ſexti lege $\frac{1}{3}$ ſexti. Pag. 13. L. 21. pro H ſemper leg. L. Pag. 15. L. 24. pro EV lege FV.

APPEN-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

156

APPENDICULA Ad Veram CIRCULI & HYPERBOLÆ QUADRATURAM.



Nte menses aliquot evulgavit Nobilissimus Vir *Christianus Hugenius* animadversiones quasdam in meam Circuli & Hyperbolæ quadraturam, quibus existimo me (in transactionibus Philosophicis Mensis *Julii*) solide satisfecisse: duæ autem fuerunt parvi momenti, quibus tunc temporis respondere non potui; utpote in ejus scriptis nequaquam versatus: prima erat, quod mea circuli approximatio esset minùs præcisa quam sua; secunda, quod mea Hyperbolæ mensuratio esset optima, quam tamen non credebat R. Societati apparere novam, quoniam illam eandem Hyperbolæ quadraturam ante aliquot annos supposuit; Dum R. Societati monstraret methodum suam inveniendi aëris gravitates in diversis a terra distantiis. Conatur hic tacitè *Hugenius* me ignorantiæ & plagii accusare; sed non animadvertit se sibi contradicere, dum meam Hyperbolæ mensurationem amplectitur, circularem autem rejicit, cum utraque una & eadem sit: oportet ergo ut non percipiat ultimas suas approximationes in libro de magnitudine Circuli (quas tanti æstimat) Hyperbolæ etiam esse applicabiles; debuit igitur & meam Hyperbolæ quadraturam rejicere: at animadvertendum est ultimam meam approximationem (cujus demonstratio ex hac appendicula dependet) in fine Prop. 25, magis esse præcisam & multo minus laboriosam quam ulla *Hugeniani*. Quod attinet ad secundam *Hugenii* accusationem: expectabam certe à tanto viro majorem ingenuitatem; Nec enim potui

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

hactenus edoceri, esse quenquam è Societ. Regia, qui tale quid ab *Hugenio* unquam prolatum recordatur. Non solum prædictæ rationes sed etiam aliæ mihi quasi persuadent Hyperbolæ quadraturam, saltem ante tot annos, *Hugenio* non innotuisse: nam nihil in tota Geometria à Mathematicis adeo est desideratum, immo nec usui humano magis accommodatum, quis ergo Geometra speculationem non solum celeberimam sed etiam maximæ utilitatis 7 vel 8 annorum spatio adeo superstitiosè celaret; & præcipuè *Hugenius*, qui non adeo alienus est à scribendi pruritu, ut res ordinarias aliquando etiam satis prolixè non edat in lucem: testantur *Theoremata de Quadratura Hyperboles*, *Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis Centro*, quæ sunt solummodo consectaria ad generalia *Guldini* inventa, anno 1635 impressa, supposito tantum solido rotundo Hyperbolico circa Diametrum conjugatam, quod inventu non est difficile: testatur quoque *liber de Magnitudine Circuli*, qui aliud non est quam comparatio segmenti Circularis cum segmento parabolico inscripto vel circumscripto eidem triangulo, satis etiam prolixe in lucem editus: atque hæc omnia subtilitate utilitate & gloriâ Hyperboles quadraturæ longè cedunt; hanc autem suo nomine indignam, vel reliquis saltem indigniorem censuit *Hugenius*. At parum refert quis sit ejus primus inventor, satis enim constat me primum esse publicatorem; neque mihi esset difficile affirmare (si modo mentiri vellem) me ante 20 annos illam cognovisse: utcunque sit, conabor hic Circuli & Hyperbolæ quadraturam ad talem perfectionem promovere, ut *Hugenius* prolem suam vix cognoscat.

Invenimus nos duplex compendium in mensuratione Circuli & Hyperbolæ; Primum consistit in continuatione seriei convergentis; Secundum in methodo inveniendi approximationes.

2L			A	B
M	a		C	D
P	2Q		E	F
R	4S		G	H
T	8V		I	K
X	16Y		N	O
			Z	

PROP. I.

INter A, B quantitates arbitrarias ſit media Geometrica C, item inter C, B ſit media harmonica D, & continuetur ſeries convergens, ut ſit ejus terminatio, ſeu Circuli, Ellipſeos vel Hyperbolæ ſector Z. Sit ut B ad C ita quantitas ad libitum $2L$ ad M, ſitque inter L & $2L+M$ media Geometrica P, & fiat $Q^2 =$ differentiæ inter $4L^2$ & P^2, item $a^2 =$ differentiæ inter $4L^2$ & M^2. Dico $a : 2Q :: C : E$. Nam $B : C :: 2L : M$, & convertendo & componendo $C+B : B :: M+2L : 2L$, ſed $C+B : B :: 2C : D$, & ideo $2C : D :: M+2L : 2L$, & duos ultimos analogiæ terminos ducendo in differentiam inter M & $2L$, $2C$ eſt ad D ut differentia inter $4L^2$ & M^2 ad differentiam inter $4L^2$ & $2ML$, & conſequentes duplicando, item priores terminos bipartiendo, C eſt ad D ut differentia inter $4L^2$ & M^2 ad differentiam inter $8L^2$ & $4ML = 4Q^2$, hoc eſt, C^2 eſt ad E^2 ut differentia inter $4L^2$ & $M^2 = a^2$ ad $4Q^2$, & ideo $C : E :: a : 2Q$, quod, *&c.*

PROP. II.

EIſdem poſitis quæ in antecedente. Dico $E : D :: P : 2L$. ex antecedente $2C : D :: M+2L : 2L$, & ultimos terminos ducendo in L, $2C : D :: ML+2L^2 : 2L^2$, & conſequentes duplicando, item priores bipartiendo $C : D :: ML+2L^2 = P^2\ 4L^2$, & ideo $E : D :: P : 2L$, quod, *&c.*

PROP. III.

EIſdem poſitis, ſit inter L & $2L+P$ media Geometrica R, ſitque $S^2 =$ differentiæ inter $4L^2$ & R^2. Dico $C : G :: a : 4S$. Eſt enim $E : D :: P : 2L$, & componendo $E+D : D :: P+2L : 2L$, ſed $E+D : D :: 2E : F$, & proinde $2E : F :: P+2L : 2L$, & poſteriores terminos ducendo in differentiam inter $2L$ & P, item conſequentes duplicando & priores terminos bipartiendo, E eſt ad F ut differentia inter $4L^2$ & $P^2 = Q^2$ ad differentiam inter $8L^2$ & $4PL = 4S^2$, & ideo $E : G :: Q : 2S$, & $E : G :: 2Q : 4S$, at ex hujus ima $C : E :: a : 2Q$, & ideo ex æqualitate $C : G :: a : 4S$, quod, *&c.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

PROP. IV.

EIſdem poſitis, dico $G : F :: R : 2L$. ex antecedente $2E : F :: P + 2L : 2L$, & poſteriores terminos ducendo in L, $2E : F :: PL + 2L^2 : 2L^2$, & conſequentes duplicando, item priores terminos bipartiendo, $E : F :: PL + 2L2 = R^2 : 4L^2$, & ideo $G : F :: R : 2L$, quod, *&c.*

PROP. V.

EIſdem poſitis, ſit inter L & $2L + R$ media Geometrica T, ſitque V^2 æqualis differentiæ inter $4L^2$ & T^2. Dico $C : I :: a : 8V$. Eſt enim $G : F :: R : 2L$ & componendo $G + F : F :: R + 2L : 2L$, ſed $G + F : F :: 2G : H$, & ideo $2G : H :: R + 2L : 2L$, & poſteriores terminos ducendo in differentiam inter 2 L & R, item conſequentes duplicando & priores terminos bipartiendo, G eſt ad H ut differentia inter $4L^2$ & $R^2 = S^2$ ad differentiam inter $8L^2$ & $4RL = 4V^2$, & ideo $G : I :: S : 2V$, & $G : I :: 4S : 8V$, & ex hujus 3tia $C : G :: a : 4S$, & ideo ex æqualitate $C : I :: a ; 8V$, quod, *&c.*

SCHOLIUM.

EX prædictis manifeſtum eſt ſeriem a, $2Q$, $4S$, $8V$, $16Y$, *&c.* eſſe analogam ſeriei C, E, G, I, N; & proinde ut a ad terminationem ſuæ ſeriei ita C ad ſectorem Z: at poſita 2 L binario cum numero quodam cyphrarum, inveniuntur omnes M, P, R, T, X, ex tot radicis quadratæ extractionibus; & proinde poterit ſeries α, $2Q$, *&c.* Produci ad libitum à paucis operationibus, ex gr. ſi deſiderarem terminum $16Y$; produco ſeriem M, P, *&c.* in X, cujus quadrati differentia à $4L^2$ eſt quadratum ipſius Y: ſi autem quæratur terminus convergens debitus termino $16Y$, dividatur duplum quadráti ipſius $16Y$ per $8V + 16Y$, & quotus dabit quæſitum. Atque hoc eſt compendium non inelegans ad producendas Circuli, Ellipſeos vel Hyperbolæ prolixiores ſeries convergentes; non tamen eſt diſſimulandum hanc methodum eſſe lubricam & in longa continuatione multas è notis poſterioribus falſificare, ob continuam Multiplicationem Numerorum Progreſſionis Geometricæ duplæ à binario.

Antequam

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

158

Antequam accedamus ad ſecundum noſtrum compendium, conſiderentur hìc Circuli proprietates quædam eximiæ.

Sit A polygonum regulare Circulo inſcriptum, B eidem ſimile circumſcriptum, C polygonum inſcriptum, duplum habens laterum numerum, D eidem ſimile circumſcriptum, & continuetur ſeries convergens, *&c.*

C erit medium Geometricum inter A & B.

D erit medium harmonicum inter C & B.

Si B ponatur perimeter polygoni B, erit C perimeter polygoni A, quoniam ſimilia polygona B, A, ſunt in duplicata ratione perimetrorum; erit quoque D perimeter polygoni D, quoniam polygona Circulo circumſcripta ſunt in eadem ratione cum ſuis perimetris; eodem modo erit E perimeter polygoni C, Item F perimeter polygoni F, & ſic deinceps.

Perimeter polygoni D erit medium harmonicum inter perimetros polygonorum A, B.

Perimeter polygoni C erit medium Geometricum inter perimetros polygonorum A, D.

Hæ proprietates non ſolùm inſunt Circulo integro, ſed etiam (conſideratis conſiderandis) omni ſectori: tertiam autem proprietatem ſi animadvertiſſet *Hugenius*, illi nonopus fuiſſet tam prolixis demonſtrationibus eaſdem approximationes à polygonis ad eorum perimetros revocare, cum ſeries polygonorum eadem ſit cum ſerie perimetrorum.

Secundum noſtrum compendium conſiſtit in methodo inveniendi approximationes, quæ ſequenti theoremati ſuperſtruitur.

THEOREMA.

In quacunque ſerie convergente A B, C D, *&c. cujus terminatio* Z, *ſi fuerit quantitas* P *eodem modo compoſita à terminis* A, B, *quo* Q *à terminis* C, D, *&* P *major fuerit quam* Q: *denique ſi componatur* Q *eodem modo à quantitatibus æqualibus* X, X, *quo à terminis* C, D *erit* X *major quam* Z: *ſi autem* P *fuiſſet minor quam* Q, *foret* X *minor quam* Z.

P	A	B
	C	D
	E	F
Q	G	H
	I	K
	L	M
X		
	Z	

Quoniam

Quoniam enim P eodem modo componitur à terminis A, B, quo Q a terminis C D, & P major est quam Q, erit etiam Q major quam quantitas eodem modo composita à terminis E F, & hæc major quam quantitas eodem modo composita à terminis G H, & sic in infinitum usque ad Z; & proinde Q multo major erit quam quantitas eodem modo composita à Z, Z, quo Q à C D vel X, X; hoc est, Q composita à X, X, major est quam quantitas eodem modo composita à Z, Z; & ideo X major est quam Z, quod, *&c.* Eodem prorsus modo demonstratur secunda Theorematis pars.

Ex hoc Theoremate (cæteris paribus) facile patet differentiam inter X & Z eo esse minorem, quo minor fuerit indefinita differentia inter P & Q. Hinc patet campus vastissimus inveniendi approximationes non solum in Circuli & Hyperbolæ mensura, sed etiam in omnium aliarum serierum convergentium terminationibus: nos tamen unam particularem methodum eligimus, quam existimamus esse reliquis faciliorem & minus prolixam, nempe ex inventorum terminorum combinatione; in hac enim prolixæ operationes Arithmeticæ evitantur. Ope nostræ methodi sequentes invenimus approximationes, quæ hic examinandæ subjiciuntur.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra Circuli vel Ellipseos sectorem, B extra: continuetur series convergens in infinitum (nempe in C D, E F, G H, *&c.*) ut sit ejus terminatio seu Circuli vel Ellipseos sector Z. Erit Z minor quam $\frac{16C + 2B - 3A}{15}$ & major quam $\frac{16D + A - 2B}{15}$, hæc approximatio veras notas terminorum C D triplicat. Erit Z minor quam $\frac{768F + 256E - 76D - 4C + B}{945}$ & major quam $\frac{1024E + 128D - 208C + 3A - 2B}{945}$, hæc approximatio veras notas terminorum E F quadruplicat. Erit Z minor quam $\frac{12288E + 16384E - 576D - 1328C + 2B + 5A}{26775}$ & major quam $\frac{512E + 512F - 72C + A - 8D}{945}$, hæc approximatio veras notas terminorum E F quintuplicat. Erit Z minor quam $\frac{524288G + 524288H - 74240E - 8704F + 1095C - A + 8D}{966735}$

&

& major quam

$$\frac{12582912G+16777216H-606208F-1372160E+2624D+5448C-2B-5A}{27390825}$$

hæc approximatio ſextuplicat veras notas terminorum GH. Erit Z minor quam

$$\frac{515396075521+68719476736K-2499805184H-5632950272G+11354112F+27783168E-10816D-26928C+2B+5A}{112165428375}$$

& major quam

$$\frac{2147483648I+2147483648K-304611328G-36175872H+4563456E+41472F-5192C-8D+A}{3958779825}$$

hæc approximatio ſeptuplicat veras notas terminorum IK.

Ut appareat hanc noſtram methodúm etiam eſſe applicabilem ſeriebus ſimplicibus, ſequentes conſiderentur approximationes. Erit Z major quam $\frac{64E-20C+A}{45}$, quæ veras notas triplicat; & major quam $\frac{4096G-1344E+84C-A}{2835}$, quæ quadruplicat; & major quam $\frac{1048576I-348160G+22848E-340C+A}{722925}$, quæ quintuplicat; item & major quam

$$\frac{1073741824L-357564416I+23744512G-371008E+1364C-A}{739552275}$$

quæ ſextuplicat.

Erit quoque Z minor quam $\frac{64F-20D+B}{45}$, quæ triplicat, & major quam $\frac{4096H-1344F+84D-B}{2835}$, quæ quadruplicat; & minor quam $\frac{1048576K-348160H+22848F-340D+B}{722925}$, quæ quintuplicat;

& major quam

$$\frac{107341824M-357564416K+23744512H-371008F+1364D-B}{739552275}$$

quæ ſextuplicat.

Quod, ſi quis deſideret approximationes omnium poſſibilium ſimpliciſſimas, ſequentes tales eſſe non ſine ratione affirmo. Erit Z minor quam $\frac{8C+8D-A}{15}$, & major quam $\frac{12D+4C-B}{15}$, quæ triplicat; & minor quam $\frac{320E+256F-52C+A}{525}$, & major quam

$\frac{48C+64D-2B-5A}{105}$; quæ quadruplicat; item minor quam $\frac{24704E+35072F-1356D-2460C+5B}{55965}$, & major quam $\frac{512E+512F-72C+A-8D}{945}$, quæ quintuplicat.

Omnes hæ approximationes (si analytice examinentur) præcedenti Theoremati quadrabunt; & insistendo vestigiis analyseos, dicto Theorematì superstruenda est compositio Geometrica, quæ satis difficilis & intricata reperietur. Methodum has approximationes inveniendi, ob diversas rationes mihi satis perspectas, celare statuo: paratus tamen sum non solum alias longè differentes harum loco substituere, sed etiam approximationes exhibere, quæ veras notas octuplucent, nonuplicent, decuplicent, &c. in infinitum etiam in aliis seriebus convergentibus ex sola hac terminorum convergentium combinatione.

Posito A polygono sectori Hyperbolico circumscripto, & B inscripto &c, eædem approximationes inserviunt Hyperbolæ, hoc solo observato quod (in verarum notarum triplicatione, quintuplicatione, septuplicatione, &c.) major approximatio nunc fiat minor & è contra.

Non opus est ut lectorem admoneam (modo prædicta intellexerit) has approximationes inservire curvis circularibus & earum adscriptis: Placet tamen sequentes approximationes exhibere huic proposito accommodatas. Sit A sinus alicujus arcus, B ejusdem tangens, C chorda & D tangens resecta a recta per terminum diametri, seu duplum tangentis semissis arcus: erit arcus minor quam $\frac{96C-22A+B}{75}$, item minor quam $\frac{16C-3A+2D}{15}$, quæ utraque veras notas triplicat, & major quam $\frac{320C+52D-56A-B}{315}$, quæ quadruplicat.

N. MERCATORIS

160

N. MERCATORIS. QUADRATURA HYPERBOLES GEOMETRICE Demonſtrata.

PROP. I.

SI fuerint quantitates continuè proportionales A, B, C, D, E, F, *&c.* numero infinitæ, quarum prima & maxima A; erit A — B ad A ut A ad ſummam omnium; hoc enim paſſim demonſtratur apud Geometras.

PROP. II.

EIſdem poſitis quæ antecedente; dico A + B eſſe ad A ut A eſt ad exceſſum omnium A, C, E, G, *&c.* in locis imparibus, ſupra omnes B, D, F, *&c.* in locis paribus: eſt enim dictus exceſſus ſumma ſeriei infinitæ continuè proportionalium in ratione A ad C, nempe A — B, C — D, E — F, *&c.* & ideo (ex præcedente) ut A — C ad A vel $A^2 - B^2$ ad A^2, ita A — B ad ſummam dictæ ſeriei, quam vocamus Z; & priores analogiæ terminos applicando ad A — B, A + B eſt ad $\frac{A^2}{A-B}$ ut A — B ad Z, & ideo $AZ + BZ = A^2$, & proinde A + B eſt ad A ut A ad Z exceſſum omnium A, C, E, G, *&c.* ſupra omnes B, D, F, *&c.* quod demonſtrare oportuit.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

PROP. III.

Fig. 1. SIt Hyperbola SB3, cujus vertex B, aſymptotæ AR, A4 aſymptotæ RA ducatur parallela BK, & altera ad libitum inter rectas BK, RA, utrique parallela YD; Dico YD eſſe ſummam infinitæ ſeriei continuè proportionalium, cujus primus terminus BK=KA & ſecundus KD; eſt enim BK−KD=AD ad BK ut BK ad DY; & ideo ex hujus prima patet propoſitum.

Eiſdem rectis RA, BK, ultra punctum K fiat parallela 34; dico rectam 34 æqualem eſſe exceſſui omnium terminorum imparium ſupra omnes terminos pares infinitæ ſeriei cujus primus terminus KB, & ſecundus K4: eſt enim KB+K4=A4 ad BK ut BK ad 34; & ideo ex hujus 2 patet propoſitum.

PROP. IIII.

Fig. 1. SIt SBKH ſpatium Hyperbolicum, contentum à curva Hyperbolica SB, aſymptotæ portione HK, & rectis SH, BK, alteri aſymptotæ parallelis, poſito B Hyperbolæ vertice: ſit parallelogrammum BKHS, & producatur B5 in R, jungatúrque KR quæ 5H ſecet in 6: deinde continuetur ſeries infinita continuè proportionalium nempe 5H, 6H, LH, NH, & ſic deinceps; ſitque 5BKH parallelogrammum, K6H triangulum, KLH trilineum quadraticum, KNH trilineum Cubicum, & ita deinceps in infinitum. Dico ſpatium Hyperbolicum, BKHS æquale eſſe dicto parallelogrammo, dicto triangulo, una cum infinitis illis trilineis, quorum omnium ſummam vocamus ω. Si Figura BKHS & ω non ſunt æquales, ſit inter illas differentia α; & dividatur recta HK in tot partes æquales à rectis aſymptotæ RA parallelis, ut rectangula (ab illis & portionibus rectæ KH contenta) Figuræ BKHS circumſcripta, nempe VH, ZD, differant à rectangulis Figuræ BKHS inſcriptis, nempè YH, BD, minore intervallo quàm α; hoc enim fieri poteſt ab indefinita diviſione rectæ KH. Quoniam B eſt Hpperbolæ vertex, parallelogrammum BKAR eſt æquilaterum; & proinde recta 6H ad libitum eſt æqualis rectæ HK, cúmque 5H, 6H, LH, NH, &c. ſint continuè proportionales in infinitum, ex hujus 3 erit recta SH æqualis ſummæ omnium, & parallelogrammum SD æquale ſummæ omnium

parallelo-

161

parallelogrammorum 5 D, 6 D, L D, N D, *&c.* in infinitum; atque summa omnium parallelogrammorum 5 D, 6 D, L D, N D, *&c.* in infinitum, major est parallelogrammo 5 D unà cum portione trianguli 6 F D H unà cum portione trilinei quadratici L C D H unà cum portione trilinei cubici N C D H, *&c.* in infinitum, quoniam prædictæ portiones dictis parallelogrammis inscribuntur, & ideo parallelogrammum S D majus est parallelogrammo 5 D unà cum dictis portionibus; eodem modo demonstratur parallelogrammum Y K majus esse rectangulo 7 K unà cum infinitis numero portionibus F K D, C K D, O K D, *&c.* & proinde rectilineum S V Y Z K H majus est quàm ω. Deindè recta F D est æqualis rectæ D K; atque 7 D, F D, C D, O D, *&c.* sunt rectæ continuè proportionales in infinitum, & igitur recta Y D est æqualis ipsarum summæ, & parallelogrammum X D æquale parallelogrammis 7 H, F D H, C D H, O D H, *&c.* at summa parallelogrammorum 7 H, F D H, C D H, O D H, *&c.* minor est quàm rectangulum 7 H unà cum portione trianguli 6 F D H unà cum portione trilinei quadratici L C D H unà cum portione trilinei cubici N C D H, *&c.* quoniam dicta parallelogramma dictis portionibus inscribuntur, & ideo parallelogrammum Y H minus est parallelogrammo 7 H unà cum dictis portionibus; eodem modo demonstratur parallelogrammum B D minus esse parallelogrammo B D unà cum infinitis numero portionibus F K D, C K D, O K D, & ideo rectilineum X Y 7 B K H minus est quàm ω: quatuor igitur sunt quantitates, quarum maxima & minima sunt rectilinea S V Y Z K H, X Y 7 B K H, intermediæ autem ω & spatium Hyperbolicum S B K H; & ideo differentia intermediarum, nempè α, minor est quàm differentia extremarum, quod est absurdum, ponitur enim major; nulla igitur est differentia inter Figuram S B K H & ω, & ideo æquales sunt, quod demonstrandum erat.

Et proinde si fuerit series infinita quantitatum continuè proportionalium in ratione K B ad K H = 6 H, cujus primus terminus est parallelogrammum B H; erit primus terminus $+ \frac{1}{2}$ secundi $+ \frac{1}{3}$ tertii $+ \frac{1}{4}$ quarti $+ \frac{1}{5}$ quinti + *&c.* in infinitum == spatio Hyperbolico S B K H, hoc enim evidenter sequitur ex quadratura trilineorum. Conf. 1.

Si autem ultra K sumatur spatium B 3 4 K, positâ 34 parallela rectæ B K, & sit series infinita quantitatum in continua ratione B K ad K 4, cujus primus terminus est parallelogrammum K Q; erit primus terminus $- \frac{1}{2}$ secundi $+ \frac{1}{3}$ tertii $- \frac{1}{4}$ quarti + *&c.* in infinitum = spatio Hyperbolico B 3 4 K: poterit hoc consectarium eodem ferè modo demonstrari Geometricè ex secunda conclusione hujus tertiæ, quo antecedens ex ejusdem conclusione priore; utrumque autem ex methodo indivisibi- Conf. 2.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

lium Cavallerianâ nullo negotio demonſtratur; ſed quoniam magni ſunt momenti, placuit methodum rigoroſam adhibere.

Quod ſi K 4 = K H, & fuerit ſeries infinita quantitatum in continuâ
Conſ. 3. ratione B K ad K 4 = K H, cujus primus terminus eſt B H = B 4; erit exceſſus ſpatii S B K H ſupra ſpatium B 3 4 K = toti ſecundo termino + $\frac{1}{2}$ quarti + $\frac{1}{3}$ ſexti + $\frac{1}{4}$ octavi + &c. in infinitum: Nam ex primo conſectario, ſpatium S B K H = primo termino + $\frac{1}{2}$ ſecundi + $\frac{1}{3}$ tertii + $\frac{1}{4}$ quarti +, &c. in infinitum: & ex ſecundo conſectario ſpatium B 3 4 K = primo termino − $\frac{1}{2}$ ſecundi + $\frac{1}{3}$ tertii − $\frac{1}{4}$ quarti + &c. at manifeſtum eſt horum differentiam = toti ſecundo + $\frac{1}{2}$ quarti + $\frac{1}{4}$ ſexti + $\frac{1}{4}$ octavi + &c. & ideo patet propoſitum.

Conſ. 4. Eiſdem poſitis quæ in antecedente conſectario, manifeſtum eſt ſpatium Hyperbolicum S H 4 3 = duplo primi termini + $\frac{2}{3}$ tertii + $\frac{2}{5}$ quinti + $\frac{2}{7}$ ſeptimi + $\frac{2}{9}$ noni + &c. in infinitum.

PROP. V.

Fig. 2.

Sit Hyperbola C E L, cujus vertex E, & aſymptotæ A B, A Y; in qua ſumantur duo ſpatia Hyperbolica ad libitum H I T R, K L Y V, contenta à curvâ Hyperbolicâ, unâ aſymptotâ & rectis alteri aſymptotæ parallelis: dividantur rectæ R T, V Y, bifariam in S & X punctis. Dico ſpatium H I T R eſſe ad ſpatium K L Y V, ut $\frac{RS \times AO}{AS} + \frac{RS^3 \times AO}{3AS^3} + \frac{RS^5 \times AO}{5AS^5} + \frac{RS^7 \times AO}{7AS^7} +$ &c. in infinitum ad $\frac{VX \times AO}{AX} + \frac{VX^3 \times AO}{3AX^3} + \frac{VX^5\, AO}{5AX^5} + \frac{VX^7 \times AO}{7AX^7} +$ &c. in infinitum. Aſymptotæ A B fiat recta parallela E O; ſitque ut A S ad A R ita A O = E O ad A M; & ut A S ad A T ita A O ad A Q; ſimiliter, ſit ut A X ad A V ita A O ad A N, & A O ad A P ut A X ad A Y; manifeſtum eſt M O = O Q & N O = O P. Ductis rectis M C, N D, P F, Q G, evidens eſt (ex Hyperbolæ proprietatibus) ſpatium C G Q M eſſe æquale ſpatio H I T R & ſpatium D F P N ſpatio K L Y V; at patet (ex conſectario 4 antecedentis) ſpatium C G Q M eſſe ad ſpatium D F P N, ut $MO + \frac{MO^3}{3AO^2} + \frac{MO^5}{5AO^4} + \frac{MO^7}{7AO^6} +$ &c. ad $NO + \frac{NO^3}{3AO^2} + \frac{NO^5}{5AO^4} + \frac{NO^7}{7AO^6} +$ &c. quæ analogia eadem eſt cum propoſita, quod demonſtrandum erat.

Hinc

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

Hinc manifeſtum eſt (ob analogiam inter ſpatia Hyperbolica & Logarithmos) differentiam inter Logarithmos numerorum A, B, eſſe ad differentiam inter Logarithmos numerorum D, E, (poſito C medio Arithmetico inter A, B, & F medio Arithmetico inter D, E, item N differentiâ inter C & A, & O differentiâ inter F & D) ut $\frac{N}{C}+\frac{N^3}{3C^3}+\frac{N^5}{5C^5}+\frac{N^7}{7C^7}+$ *&c.* ad $\frac{O}{F}+\frac{O^3}{3F^3}+\frac{O^5}{5F^5}+\frac{O^7}{7F^7}+$ *&c.* & ideo ſi ponatur $A=D=1$, hinc patet Methodus inveniendi Logarithmum quemcunque ex uno dato, abſque ulla Hyperbolæ conſideratione, ſed calculo plerumque nimis laborioſo. Quod ſi ponatur $A=999$, $B=1001$, cum datis Logarithmis, item D, E, numeri dati majores, unitate vel parvo aliquo intervallo differentes, nullo negotio invenietur differentia Logarithmorum numeris D, E, debitorum; hâc Methodo non difficulter computatur integra Logarithmorum tabula ad quotvis notas.

N A Conf. 1.
C B
O D
F E

Facilè quoque deducitur (ex 3 Conſect. antecedentis Prop.) differentiam ſecundam Logarithmorum numerorum in ratione Arithmetica G, H, I, eſſe ad differentiam ſecundam Logarithmorum numerorum in ratione Arithmetica K, L, M, (poſito P differentia inter G, H, & Q differentia inter K, L,) ut $\frac{P^2}{H^2}+\frac{P^4}{2H^4}+\frac{P^6}{3H^6}+$ *&c.* ad $\frac{Q^2}{H^2}+\frac{Q^4}{2H^4}+\frac{Q^6}{3H^6}+$ *&c.* non diſſimili ferè methodo determinantur differentiæ Logarithmorum tertiæ, quartæ, quintæ, & ſic deinceps; ſed non eſt operæpretium illas proſequi: primæ enim differentiæ compoſitioni Logarithmorum abundè ſufficiunt.

G
P H
I
K
Q L
M

ANALOGIA

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

ANALOGIA
Inter
LINEAM MERIDIANAM
PLANISPHERII NAUTICI:
&
TANGENTES ARTIFICIALES
Geometricè Demonstrata, &c.

PROP. I. THEOREMA.

Fig. 3. SIt Circuli quadrans TQZ, cujus pars sit arcus QI: super arcu QI imaginetur portio superficiei Cylindrici recti talis naturæ, ut (sumpto in arcu QI quolibet puncto O) perpendicularis ad planum TZQ ex puncto O ad summitatem portionis superficiei cylindricæ excitata semper fiat æqualis secanti arcus OQ. Deinde sit mixtilineum AIYTQ talis naturæ, ut (ducta in eo recta XD radio QT parallela & arcum quadrantis secante in puncto ad libitum O) recta DX, secans arcus OQ, & radius TQ sint continuè proportionales. Dico mixtilineum AYTQ esse æquale dictæ portioni superficiei cylindricæ: si prædictæ Figuræ non sunt æquales, sit inter illas differentia α, & dividatur recta YT in tot partes æquales à rectis BX, EV, radio QT parallelis, ut (completis rectangulis AX, DV, GT, CX, FV, λT,) differentia rectilineorum ABDEGHTY, CDFGλQTY, sit minor quàm α; manifestum est enim hoc fieri posse ab indefinita divisione rectæ YT. Ducatur in puncto O recta tangens OPM, sitque in rectam EV perpendicularis OS: triangula OPS, TMO, rectangula ad S & O sunt

163

ſunt ſimilia ob æqualitatem angulorum P O S, O T M; nam ab angulis æqualibus nempe rectis P O T, S O X, auferendo eundem angulum S O T, relinquuntur anguli æquales P O S, X O T, atque ob parallelas O X, Q T, angulus XOT æqualis eſt angulo OTM, & ideo æquales ſunt anguli POS, OTM; & proinde ut OS ad OP, Ita OT ad TM, ut autem OT ad T M ita TM ad XD, & igiur rectangulum OS in XD, nempe rectangulum D V, æquale eſt rectangulo T M in O P, ſed rectangulum T M in O P majus eſt portione ſuperficiei cylindricæ rectæ inſiſtente curvæ O N, quoniam (T M exiſtente maxima ejuſdem portionis altitudine) recta P O major eſt quàm curva N O, ut patet ex Prop. 1. Geomet. part. univerſalis; & proinde rectangulum D V majus eſt quàm portio ſuperficiei cylindricæ rectæ inſiſtens curvæ O N: eodem modo demonſtratur G T majus portione ejuſdem ſuperficiei inſiſtente curvæ N Q & A X majus portione ſuper curva I O, & ideo rectilineum A B D E G H T Y majus eſt integrâ propoſitâ portione ſuperficiei cylindricæ; idem quoque rectilineum majus eſt mixtilineo AQ T Y. Tangens in puncto N ducatur L N K, à parallelis proximis utrinque terminata in L, K; ex Prop. 1. Geomet. part. univer. patet rectam L N ſeu N K minorem eſſe arcu O N, ſed (ut hactenus) demonſtratur rectangulum G T vel F V æquale eſſe rectangulo N K vel N L in K T; atque rectangulum N L in K T minus eſt portione ſuperficiei cylindricæ rectæ inſiſtente curvæ O N, quoniam (T K exiſtente minima ejuſdem portionis altitudine) recta L N minor eſt curvâ O N; & proinde rectangulum E V minus etiam eſt quàm prædicta portio: eodem modo demonſtratur rectangulum λ T minus eſſe portione ſuper curva N Q & rectangulum C X minus portione ſuper curva I O, & ideo rectilineum C D F G λ Q T Y minus eſt integrâ propoſitâ ſuperficiei cylindricæ rectæ portione, idem quoque rectilineum minus eſt mixtilineo A Q T Y: ex prædictis ergo manifeſtum eſt quatuor eſſe quantitates, quarum maxima & minima ſunt rectilinea A B D E G H T Y, C D F G λ Q T Y, intermediæ autem ſuperficiei cylindricæ portio propoſita & mixtilineum A Q T Y; & ideo differentia intermediarum minor eſt quàm differentia maximæ & minimæ, differentia autem maximæ & minimæ ex conſtructione minor eſt quàm α, & proinde differentia intermediarum nempe ſuperficiei cylindricæ & mixtilinei A Q T Y multo minor eſt quam α, quod eſt abſurdum, ponitur enim α, non igitur differunt mixtilineum A Q T Y & propoſita ſuperficiei cylindricæ portio; & ideo æqualia ſunt, quod demonſtrare oportuit.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

PROP. II. THEOREMA.

Fig. 4. SIt Circuli quadrans QML, ſitque mixtilineum AHLQM talis naturæ, ut (ducta recta ad libitum HN radio LQ parallela & quadrantis arcum ſecante in K) recta HN æqualis ſit ſecanti arcus LK, ſitque mixtilineum ABLQMA talis naturæ, ut (productâ arbitrariâ NH in B) rectæ LQ, NH, NB, ſint continuè proportionales: deinde ſit Semihyperbola IDE cujus axis MA, vertex I & aſymptoton MLE: ducatur ad libitum radio LQ parallela recta NB, curvas LKM, LHA, LBA, ſecans in punctis K, H, B; & per punctum H ducatur radio MQ recta parallela HF Hyperbolæ occurrens in puncto D. Dico Sectorem Hyperbolicum IMD æqualem eſſe ſemiſſi Figuræ BLQN, quæ Figura (ut in antecedente demonſtratum eſt) æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ conflatæ ex omnibus ſecantibus arcuum infinitorum OL plano LMQ in debitis ſuis punctis O normaliter inſiſtentibus. Ex *Gregorii* à S. *Vincentio* doctrina ductuum, truncus cylindrici recti ſuper Figura LHNQ reſectus à plano baſin ſemiormaliter ſecante in recta QM, æqualis eſt ſemiſſi cylindrici recti cujus baſis eſt Figura LBNQ & altitudo recta LQ, quoniam LQ ſemper eſt ad NH ut NH ad NB: manifeſtum autem eſt eundem truncum oriri ex ductu trianguli rectanguli iſoſcelis TGM in Figuram LHNQ, hoc eſt ex ducti trianguli rectanguli iſoſcelis TGM in Figuram LHNQ, hoc eſt ex ductu trianguli rectanguli iſoſcelis ωIM in rectangulum VLQN & ex ductu trapezii TGIω in Figuram HLV; atque ſolidum factum ex ductu trianguli rectanguli ωIM in rectangulum VLQN æquale eſt priſmati cujus altitudo LQ & baſis triangulum IλM, quod ſic probo; $MG^2 : MI^2 :: MI^2 : KN^2$, & per converſionem rationis $MG^2 : MG^2 - MI^2 = GD^2 :: MI^2 : MI^2 - KN^2 = NQ^2$, & ideo $MG : GD :: MI : NQ$, ut autem MG ad DG ita quælibet $MP = PR$ ad ductam PS ipſi GD parallelam, & ideo ut PR ad PS ita MI ad NQ, cúmque hoc ſemper fiat, manifeſtum eſt priſma cujus baſis λIM & altitudo IM æquale eſſe ſolido ex ductu trianguli ωIM in rectangulum VLQN: item ſolidum factum ex ductu trapezii TGIω in Figuram HLV æquale eſt cylindrico cujus baſis eſt Figura IDλ & altitudo IM, qnod ſic probo; $GM : GD :: MI : QN$, & per converſionem rationis $GM : DF :: MI : GH$; ducatur recta ad libitum Yξ radio MQ parallela & curvas ſecans ut in Figura, eritque $GM : DF :: XM : \gamma\xi$, & ideo $XM = XY : \gamma\xi :: MI :$

G

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

164

GH = XZ, & ideo χΥ × XZ = MI × γξ; ut autem antè demonstratum est GM esse ad DF ut MI ad GH, eodem modo nunc demonstrari potest XM = XY esse ad αξ ut MI ad Xθ, & ideo XY × Xθ = MI × αξ, cúmque XY × XZ = MI × γξ, si ab æqualibus æqualia auferantur, XY × Zθ = MI × αγ, cúmque hæc æqualitas semper contingat, manifestum est Trapezium TGIω ductum in Figuram HLV efficere solidum æquale cylindrico cujus basis IDλ & altitudo IM; & proinde totus truncus super Figura HLQN ortus ex ductu trianguli TGM in eandem Figuram HLQN est æqualis cylindrico cujus basis est sector Hyperbolicus MID & altitudo MI, atque idem truncus æqualis est dimidio cylindrici cujus basis est Figura BLQN & altitudo eadem IM, & ideo semissis cylindrici super Figura BLQN cum altitudine IM æqualis est cylindrico cujus basis MID & altitudo eadem IM, est igitur Figura BLQN dupla sectoris Hyperbolici MID, quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIUM.

Hinc sequitur, quòd Figura BLQN semper sit dupla Logarithmi differentiæ inter tangentem & secantem arcus KL, posito radio LI loco unitatis, quod sic probo. Ex punctis I, D, in asymptoton ME demittantur perpendiculares Iσ, Dπ; ex demonstratis in Circ. & Hyperb. Quad. manifestum est sectorem MID esse æqualem Figuræ IDπσ, item Figuram IDπσ esse Logarithmum rectæ Dπ positâ Iσ unitate; ut autem Iσ ad Dπ ita IL radius ad DF differentiam inter tangentem & secantem, & ideo posita IL unitate erit idem sector MID Logarithmus rectæ DF, nempe excessus qua secans arcus KL superat ejusdem tangentem.

PROP. III. THEOREMA.

Linea Meridiana Planisphærii Nautici *est Scala Logarithmorum excessuum, quibus* Secantes *Latitudinum superant earundem* Tangentes, *posito radio loco unitatis.*

Suppono ex Scriptoribus Nauticis in eorum Planisphærio arcum LK in Æquatore esse ad eundem LK in latitudine, ut rectangulum ex LQ in KL ad portionem superficiei Cylindricæ conflatæ ex omnibus secantibus arcuum infinitorum OL plano LMQ in debitis suis punctis O normaliter insistentibus, seu Figuram BLQN; demonstratum Fig. 4.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

autem eſt in antecedente ſectorem hyperbolicum M I D ſeu Logarithmum rectæ D F (poſita Q L unitate) differentiæ inter tangentem & ſecantem arcus K L eſſe ſemiſſem Figuræ B L Q N, patet quoque ſectorem circularem Q K L eſſe ſemiſſem rectanguli L Q in K L; & ideo L K in Æquatore eſt ad L K in latitudine ut ſector Q K L ad Logarithmum exceſſus quo ſecans arcus K L ſuperat ejuſdem tangentem; & ideo ſolidum ex L K in Logarithmum dicti exceſſus æquale eſt ſolido ex L K in latitudine in ſectorem Q K L, & utrumque ſolidum applicando ad L K, Logarithmus dicti exceſſus æqualis eſt rectangulo ex L K in latitudine $\frac{QL}{2}$; eodem modo demonſtratur Logarithmum exceſſus, quo ſecans arcus cujuſcunque O L excedit ejuſdem tangentem, æqualem eſſe rectangulo ex O L in latitudine in $\frac{QL}{2}$; & proinde Logarithmus exceſſus quo ſecans arcus K L ſuperat ejuſdem tangentem, eſt ad rectangulum ex L K in latitudine in $\frac{QL}{2}$, ut Logarithmus exceſſus quo ſecans arcus O L ſuperat ejuſdem tangentem ad rectangulum ex O L in latitudine in $\frac{QL}{2}$, & permutando, & utrumque rectangulum applicando ad $\frac{QL}{2}$; Logarithmus exceſſus quo ſecans arcus K L ſuperat ejuſdem tangentem, eſt ad Logarithmum exceſſus quo ſecans arcus O L ſuperat ſuam tangentem, ut arcus K L in latitudine ad arcum O L in latitudine ab Æquatore Planiſphærii Nautici in linea recta computatis; & ideo linea Meridiana Planiſphærii Nautici analoga eſt Logarithmis exceſſuum, quibus Secantes latitudinum ſuperant ſuas Tangentes, quod demonſtrare oportuit.

SCHOLIUM.

EX hoc Theoremate evidens eſt Methodus deſcribendi integram meridianam, etiam ignota arcus dati in Æquatore menſura; quam menſuram ex hujus 2 tali praxe invenimus. Sit Q L radius 10000000000, D F 1000000000, & proinde ex noſtra Circl. & Hyper. quadratura Prop. 32 invenietur ſector hyperbolicus M I D 1151292546497022 812008, qui eandem habet rationem ad ſectorem Q K L quam arcus K L in latitudine ad eundem in Æquatore, & dividendo utrumque ſectorem per $\frac{QL}{2}$, erit ut 2302585092994|045624 ad arcum K L ita K L

in

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

in latitudine ad eundem in Æquatore; qualis autem ſit arcus K L ita invenimus, ut D F exceſſus ſecantis arcus K L ſupra ejuſdem tangentem ad L Q radium, ita L Q ad 100000000000 ſummam tangentis & ſecantis ejuſdem arcus K L, erit ergo K C tangens arcus K L 49500000000, C Q ejuſdem ſecans 50500000000, & N Q ejuſdem ſinus 9801980198$\frac{2}{101}$, è quibus non difficilè erit invenire ipſum arcum ope noſtræ Quadr. Circ. & Hyp. Prop. 30, vel (ſi quis rudiore calculo contentus fuerit) è Tabula Sinuum. Ad datam autem arcûs dati in Æquatore menſuram, Meridianam Nauticam conſtruere, praxis eſſet hujus inverſa, quæ nullo negotio ex hac colligitur.

Ex prædictis manifeſtè patet Lineam Meridianam Planiſphærii Nautici eſſe ſcalam tangentium artificialium arcuum, qui ſunt ſemiſſes complementorum latitudinum, poſito radio loco unitatis, quoniam (ut patet ex Trigonometria) prædictæ differentiæ ſunt eædem cum dictis tangentibus. Si autem complementorum Secantes radio inſiſtant, erit Figura ex illis conflata nempe A H L Q M A ad quadratum radii ut quadrans circumferentiæ ad radium, ut patet ex noſtræ Geom. part. univerſali Prop. 2dâ.

PROP. IV. THEOREMA.

Sit Circuli quadrans V O A, cujus ſit pars 6 ω: ſuper arcu 6 ω imaginetur ſuperficies Cylindrici recti talis naturæ, ut (ſumpto in arcu 6 ω quolibet puncto O) perpendicularis ad planum V A X ex puncto O ad ſummitatem ſuperficiei Cylindricæ excitata ſemper fiat æqualis tangenti arcus O A. *Sit* hyperbola C P Q cujus vertex C (nempe ſuppoſitâ A C parallelâ & æquali radio X V & aſymptotæ X A, X V; ducantur rectæ P ω Y, 2 6 7, radio V X parallelæ: Dico ſpatium Hyperbolicum 2 P Y 7 æquale eſſe dictæ ſuperficiei Cylindricæ; ſi dictæ Figuræ non ſint æquales, ſit inter illas differentia α, & dividatur recta 7 Y in tot partes æquales à planis rectæ 7 Y perpendicularibus & ſpatium Hyperbolicum in rectis E γ, G Z, ſecantibus, item ſuperficiem Cylindricam in diverſas portiones dividentibus, ut omnia rectangula Cylindrica ſimul hiſce portionibus inſcripta differant ab omnibus rectangulis Cylindricis ſimul eiſdem circumſcriptis minore quantitate quàm α, hoc enim abſque dubio fieri poteſt ab indefinita diviſione rectæ 7 Y; Intelligo autem rectangulum Cylindricum portioni inſcriptum eſſe ſuperficiem Cylindricam rectam cujus eadem eſt baſis cum portione cui inſcribitur, & altitudo ubique eadem cum minima altitudine portionis, item circum- Fig. 5

 ſcriptum

165

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

ſcriptum cui eadem etiam eſt baſis cum portione, & altitudo eadem cum portionis altitudine maxima. Compleantur rectangula 2γ, $B\gamma$, EZ, FZ, GY, NY; & ducatur in puncto K tangens $LK\xi$, ſitque in rectam LZ perpendicularis KM. Triangula LKM, $K\xi X$, rectangula ad K & M ſunt ſimilia ob angulos æquales $K\xi X$, LKM; & ideo ut KM ad KL, ita $K\xi$ ad $X\xi$, & ideo $KL \times K\xi = KM \times X\xi$, atque γE eſt æqualis rectæ $X\xi$, quod ſic probo; XY eſt ad XK vel AC, ut XK ad $X\xi$, ſed ob Hyperbolam, $X\gamma$ eſt ad AC ut AC ad γE, ſunt ergo æquales γE, $X\xi$, & ideo rectangulum ex KL in $K\xi$ æquale eſt rectangulo ex KM in $E\gamma$ nempe EZ, atque rectangulum ex KL in $K\xi$ majus eſt rectangulo cylindrico inſcripto portioni ſuper KO, quoniam eandem cum illo habens altitudinem nempe $K\xi$ baſem habet majorem (eſt enim recta KL major quam curva KO) & ideo rectangulum EZ majus eſt rectangulo cylindrico inſcripto portioni ſuper KO; eodem modo probatur rectangulum GY majus eſſe rectangulo inſcripto portioni ſuper $O\omega$, & rectangulum 2γ majus eſſe rectangulo cylindrico inſcripto portioni ſuper $6K$; & proinde rectilineum $72D$ $EHGRY$ majus eſt omnibus rectangulis cylindricis inſcriptis ſimul ſumptis, & ideo ſpatium Hyperbolicum $2PY7$ eiſdem rectangulis cylindricis multò majus eſt. In puncto O ducatur tangens $3OS$; demonſtratur ut antè rectangulum OS vel OI in $O3$ æquale eſſe rectangulo GY ſeu FZ, atque rectangulum $O3$ in OI minus eſt rectangulo cylindrico circumſcripto portioni ſuper KO, quoniam eandem cum illo habens altitudinem, baſem habet minorem (eſt enim recta OI minor quam curva KO) & proinde rectangulum FZ minus eſt rectangulo cylindrico circumſcripto portioni ſuper KO; eodem modo probatur rectangulum NY minus eſſe rectangulo cylindrico portioni ſuper $O\omega$ circumſcripto, & rectangulum $B\gamma$ minus eſſe rectangulo cylindrico portioni ſuper $6K$ circumſcripto; & ideo rectilineum $7BEFGNPY$ minus eſt omnibus rectangulis cylindricis circumſcriptis ſimul ſumptis; & ideo ſpatium hyperbolicum $2PY7$ eiſdem rectangulis cylindricis multo minus eſt. Quatuor igitur ſunt quantitates, quarum maxima & minima ſunt rectangula cylindrica circumſcripta ſimul ſumpta & rectangula cylindrica inſcripta ſimul ſumpta, intermediæ autem ſpatium hyperbolicum $2PY7$ & ſuperficies cylindrica ſuper curva 6ω, & ideo differentia intermediarum minor eſt quam differentia maximæ & minimæ; at differentia maximæ & minimæ ex conſtructione minor eſt quam α, & ideo differentia intermediarum nempe ſpatii Hyperbolici & ſuperficiei cylindricæ eſt multo minor quam α, quod eſt abſurdum, ponitur enim α; non igitur differunt quantitates intermediæ, & ideo æquales ſunt, quod demonſtrandum erat.

Quòd

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

166

Quòd si Superficies cylindrica producatur usque ad terminum quadrantis A: dico adhuc illam esse æqualem spatio hyperbolico correspondenti C P Y A; si non sunt æquales, sit superficies cylindrica super A ω major spatio hyperbolico C P Y A, & abscindatur plano B 6 7 rectæ A X normali portio superficiei cylindricæ, ita ut relicta nempe superficies cylindrica super curva 6 ω sit æqualis spatio hyperbolico C P Y A, atque superficies super 6 ω æqualis est spatio hyperbolico 2 P Y 7, ex hactenus demonstratis; spatia igitur hyperbolica C P Y A, 2 P Y 7, sunt æqualia, quod est absurdum; superficies ergo cylindrica super A ω non est major spatio hyperbolico C D Y A; sit (si fieri potest) minor & à spatio hyperbolico C P Y A auferatur rectâ 2 7 ipsi C A parallelâ spatium C 2 7 A, ita ut relictum 2 P Y 7 fiat æquale superficiei cylindricæ super A ω, atque spatium hyperbolicum 2 P Y 7 æquale est superficiei cylindricæ super 6 ω; & ideo superficies cylindricæ super 6 ω & super A ω inter se sunt æquales, quod est absurdum; & ideo superficies cylindrica super A ω non est minor spatio hyperbolico C P Y A, sed (ut ante demonstratum est) nec est major; restat igitur, ut illi sit æqualis, quod demonstrandum erat.

Consectarium.

Hinc manifestum est superficiem cylindricam ex tangentium summa conflatam (*v. g.* super curva A ω) esse secantem artificialem ejusdem arcus A ω, posito radio loco unitatis; nam (ut demonstratur in nostra Circuli & Hyp. Quadr.) posita C A seu radio loco unitatis, erit spatium hyperbolicum A C P Y Logarithmus rectæ Y P secantis arcus A ω.

PROP. V. Theorema.

Fig. 6.

Sit circuli quadrans QCω bifariam divisus in puncto D. Sit arcus DM minor quam D ω, super quo imaginetur superficies Cylindrici recti talis naturæ, ut (sumpto in arcu D M quolibet puncto G) perpendicularis ad planum QCω ex puncto G ad summitatem superficiei cylindricæ excitata semper fiat æqualis secanti arcus G C. In radium Q C demittantur rectæ perpendiculares D V, M R, quæ producantur in 2 & β.; fiatque mixtilineum V 2 β R talis naturæ, ut (ductâ rectâ quâcunque G T 5 rectæ D V parallelâ) tangentes arcuum G C, G ω, simul, nempe

nempe recta AO, æquales sint rectæ T5. Dico mixtilineum V2βR æquale esse superficiei cylindricæ super curva DM: si prædictæ Figuræ non sint æquales, sit inter illas differentia α, & dividatur recta VR in tot partes æquales planis rectæ VR perpendicularibus, & mixtilineum V2βR in rectis T5, S8, secantibus & superficiem cylindricam in diversas portiones dividentibus, ut omnia rectangula cylindrica simul, hisce portionibus inscripta, differant ab omnibus rectangulis cylindricis simul, eisdem circumscriptis minore quantitate quàm α; hoc enim absque dubio fieri potest ab indefinita divisione rectæ VR. Compleantur rectangula V4, V5, T7, T8, S9, Sβ, & ducatur in puncto G tangens AGO, sitque in rectam LS perpendicularis GK. Triangula IGK, OAQ, sunt similia, & ideo ut GK vel VT ad GI vel GE, ita QA ad AO seu T5, & proinde rectangulum VT in T5 nempe V5 æquale est rectangulo EG in AQ, atque rectangulum EG in AQ minus est rectangulo cylindrico circumscripto portioni super GD, quoniam eandem cum illo habens altitudinem nempe AQ, basem habet minorem; & ideo rectangulum V5 minus est rectangulo cylindrico circumscripto portioni super GD; eodem modo demonstratur rectangulum T8 minus esse rectangulo cylindrico circumscripto portioni super GI, & rectangulum Sβ minus esse rectangulo cylindrico circumscripto portioni super LM; & ideo rectilineum V35687βR minus est omnibus rectangulis cylindricis circumscriptis simul sumptis, & igitur mixtilineum V2βR eisdem rectangulis cylindricis multo minus est. Ob similia triangula DFH, BPQ; DH vel VT est ad DF ut BQ ad BP vel V2, & ideo rectangulum V4 æquale est rectangulo DF in BQ; at rectangulum DF in BQ majus est rectangulo cylindrico portioni super DG inscripto, quoniam eandem cum illo habens altitudinem BQ, basem habet majorem; & ideo rectangulum V4 majus est rectangulo cylindrico inscripto portioni super DG; eodem modo probatur rectangulum T7 majus esse rectangulo cylindrico inscripto portioni super GL, & rectangulum S9 majus esse rectangulo cylindrico inscripto portioni super LM, & ideo rectilineum V245789R majus est omnibus rectangulis cylindricis inscriptis simul sumptis; est ergo mixtilineum V2βR eisdem rectangulis cylindricis multo majus. Quatuor igitur sunt quantitates, quarum maxima & minima sunt rectangula cylindrica circumscripta simul, & rectangula cylindrica inscripta simul; intermediæ autem mixtilineum VTβR & superficies cylindrica super curva DM, & ideo differentia maximæ & minimæ est major differentiâ intermediarum, differentia autem maximæ & minimæ ex constructione est minor quam α, & ideo differentia intermediarum est multo minor quàm α,

quod

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

quod est absurdum, ponitur enim α; non igitur differunt quantitates intermediæ & ideo æquales sunt, quod, *&c.* Quòd si arcus D M sumeretur versus C, adhuc staret Prop. Demonstratio autem esset paulo diversa, quæ tamen nullo negotio ex priore colligeretur. Si punctum M in ipso C caderet, verum etiam esset *Theorema*, sed negativè per duas positiones demonstrandum, sicut in fine antecedentis.

Sit mixtilineum V X Z R talis naturæ, ut (ducta recta quacunque G T Y rectæ D X parallela) recta T Y semper æqualis fiat tangenti G O; manifestum est (ex Geomet. part. univer. Prop. 4.) mixtilineum V X Z R æquale esse superficiei trunci cylindrici recti resectæ à plano basem seminormaliter secante in recta P Q, atque (ex Geom. part. univers. Prop. 3.) evidens est eandem trunci superficiem æqualem esse rectangulo N ξ in C Q, & ideo mixtilineum V X Z R eidem rectangulo est æquale. Ex prædictis evidens est mixtilineum X 2 β Z talis esse naturæ ut Y 5 semper sit æqualis tangenti G A; & proinde mixtilineum X 2 β Z unà cum portione quadrantis D V R M æquale est spatio conchoïdali resecto à rectis D V, M R, cujus conchoïdis vertex est C, norma P Q, polus π, C Q = Q π: ex hac Prop. & hujus 2 evidens est sequens consectarium spatio conchoïdali quadrando satis expeditum.

Consectarium.

SI in prædicta conchoïde accipiatur spatium contentum à curva conchoïdali & rectis C T, T 6; erit prædictum spatium æquale duplo spatii hyperbolici (cujus asymptotæ Q A, Q P, semiaxis Q C) contenti à curva hyperbolica una asymptotâ & rectis Q C, Q A — G A, alteri asymptotæ parallelis, una cum semisegmento circulari C G T dempto rectangulo Q C in G T. Aliarum conchoïdeon spatia (nempe quando vertex & polus non æqualiter distant à normali) possunt mensurari per Analogiam à *Wallisio* in Epist. Com. pag. 171 demonstratam.

PROP. VI. Theorema.

SIt cissois K L M cujus asymptoton G M, semicirculus G D K. Fig. 7. Diametro G K sit normalis D I L, & jungantur rectæ D K, G L; Dico spatium cissoïdale G K L triplum esse segmenti circularis D N K. Ducatur curva K C B talis naturæ, ut (ductâ ad libitum à puncto G

recta

recta G D A, quæ tangenti occurrat in A) C D I perpendicularis rectæ G K, fiat æqualis rectæ K A. Recta D F semicirculum tangat in puncto D, & ideo æquales sunt rectæ F D, F K; cúmque angulus K D A sit rectus, patet F A, F D, esse æquales; cúmque C I semper sit æqualis duplæ ipsius D F, manifestum est (ex Geom. part. univer. Prop. 4.) mixtilineum C K I esse duplum superficiei trunci cylindrici recti super curva D N K resectæ à plano basem seminormaliter secante in recta KA; atque eadem superficies trunci æqualis est rectangulo ex curva D N K in radium K H ablato rectangulo ex D I in H K (ut satis patet versatis in superficierum studio) hoc est duplo segmenti circularis D N K; est igitur mixtilineum C K I quadruplum segmenti circularis D N K. Ut D I ad I K ita est I K vel D E ad E A vel C D, & proinde æquales sunt rectæ C D, I L, cúmque hoc semper fiat, patet spatium cissoïdale I K L æquale esse mixtilineo DNKC, & idem utrinque addendo nempe semisegmentum circulare D I K N, mixtilineum C K I, seu quadruplum segmenti circularis D N K, æquale est mixtilineo D N K L, & utrinque auferendo segmentum circulare D N K; triplum segmenti circularis D N K æquale est mixtilineo D O K L, seu (ob æqualitatem triangulorum D K I, G I L) ipsi spatio cissoidali proposito G K L, quod demonstrandum erat.

Hìc supponitur arcus D N K quadrante minor, quod si quadrante esset major, nullo negotio variari potest demonstratio ut illi inserviat: at K N D existente semicircumferentiâ, multò facilior esset demonstratio, nempe quòd spatium cissoïdale infinitè extensum æquetur semicirculi triplo.

Methodus

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

168



Methodus Componendi
TABULAS TANGENTIUM
&
SECANTIUM ARTIFCIALIUM
Ex
TABULIS TANGENTIUM
&
SECANTIUM NATURALIUM
Exactissimè & minimo cum Labore.

SIt AI arcus quadrantis in lineam rectam extensus, sitque Figura AHI conflata ex tangentibus naturalibus singulorum arcuum à puncto A, in debitis suis punctis, rectis AI normaliter insistentibus: sit AP pars minima, in cui æquales dividitur quadrans, nempe $\frac{1}{60}$ vel $\frac{1}{100}$ gradus, sintque illi æquales PO, ON, NM, *&c.* & ducantur rectæ AI perpendiculares PB, OC, ND, ME, *&c.* manifestum est ex consectario 4 hujus, Figuram ABP esse secantem artificialem arcus AP item Figuram ACO esse secantem artificialem arcus AO, (positâ cyphrâ loco radii artificialis) *&c.* manifestum est rectangula BO, CN, DM, *&c.* inveniri ex multiplicatione minimæ partis quadrantis AP in singulas tangentes naturales; at in mensurandis Figuris ABP, BCX, CDV paulò major est difficultas; primo igitur si tangentes conveniant in differentiis primis, non differunt lineæ AB, BC, CD, *&c.* à rectis, & ideo Figuræ ABP, BCX, CDV, *&c.* erunt triangula rectangula, & proinde *e.g.* $GHQ = \frac{HQ \times QG}{2}$: quod si differentiæ secundæ fuerint æquales, erunt dictæ Figuræ portiones trilineorum quadraticorum, *e.g.* erit GHQ portio trilinei quadratici, cujus axi HQ est parallela, differentiæ illæ inter se æquales sint Z; & proinde erit GHQ=

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

$\frac{HQ \times GQ}{2} - \frac{Z \times GQ}{12}$: ſi autem differerentiæ tertiæ fuerint æquales, erunt dictæ Figuræ portiones trilineorum cubicorum, eritque *e. g.* $GHQ = \frac{HQ \times GQ}{2} - \sqrt{q}\left(\frac{HQ \times Z \times GQ^2}{72} - \frac{Z^2 \times GQ^2}{1728}\right)$: quando differentiæ quartæ ſunt æquales, erunt dictæ Figuræ portiones trilineorum Q-quadraticorum, & differentiæ quartæ erunt æquales 24tuplo Q-quadrati ipſius GQ diviſo per cubum lateris recti, item quando differentiæ quintæ ſunt æquales, erunt dictæ Figuræ portiones trilineorum ſurſolidorum, & differentiæ quintæ erunt æquales 120plo ſurſolidi ipſius GQ diviſo per Q-quadratum lateris recti, & ſic in infinitum. Quæ hic diximus de compoſitione ſecantium artificialium ex tangentibus naturalibus eodem modo intelligi velim de compoſitione tangentium artificialium ex ſecantibus naturalibus ſecundum hujus tertiam. Animadvertendum tangentes & ſecantes artificiales ſuprà computari, poſito o Logarithmo unitatis, 1000000000000 radio, & 230258509299404568401787o Logarithmo denarii: facilius autem (nimirum ſolâ additione) poſito $\frac{1}{60}$ grad. $= GQ = AP = 1$, computabimus tangentes & ſecantes artificiales ad 79157704407097819 denarii Logarithmum; nam hac ratione $\frac{HQ \times GQ}{2} = GHQ = \frac{HQ}{2}$, item $\frac{HQ \times GQ}{2} - \frac{Z \times GQ}{12} = GHQ = \frac{HQ}{2} - \frac{Z}{12}$, item $\frac{HQ \times GQ}{2} - \sqrt{q}\left(\frac{HQ \times Z \times GQ^2}{72} - \frac{Z^2 \times GQ^2}{1728}\right) = HGQ = \frac{HQ}{2} - \sqrt{q}\left(\frac{HQ \times Z}{72} - \frac{Z^2}{1728}\right)$: & tandem unicâ ſolâ diviſione invenimus tangentes & ſecantes artificiales ad Logarithmum denarii 1000000000000000, poſito ſemper radio unitatis loco, quæ ſunt differentiæ tangentium & ſecantium artificialium in tabula ab ipſo radio artificiali; & proinde diviſoris multiplices, ad facilitandam operationem, in tabella ſubſidiaria hic reponimus. Quod ſi $\frac{1}{100}$ grad. $= GQ$, tangentes & ſecantes artificiales debentur Logarithmo denarii 131928 40779829703, cujus etiam multiplices in ſubjecta tabella notantur. Quod, ſi quis velit hos numeros potius repræſentare radium artificialem quam denariii Logarithmum, addatur cyphra & habebit intentum. Notandum hos numeros convenire radio naturali 1000000000000, hinc enim patebit numerus notarum in adſcriptis artificialibus.

1	79157044678978 19	131928407798 29703
2	158314089357956 38	263856815596594 06
3	237471134036934 57	395785223394891 09
4	316628178715912 76	527713631119318 812
5	395785223394890 95	659642038991485 15
6	474942268073869 14	791570446789782 18
7	554099312752847 33	923498854588079 21
8	633256357431825 52	105542726238637 624
9	712413402110803 71	118735567018467 327

FINIS.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.150/b

Fig: 3.ta

A B C D E F G H M P λ K Q L N O S Y X V T

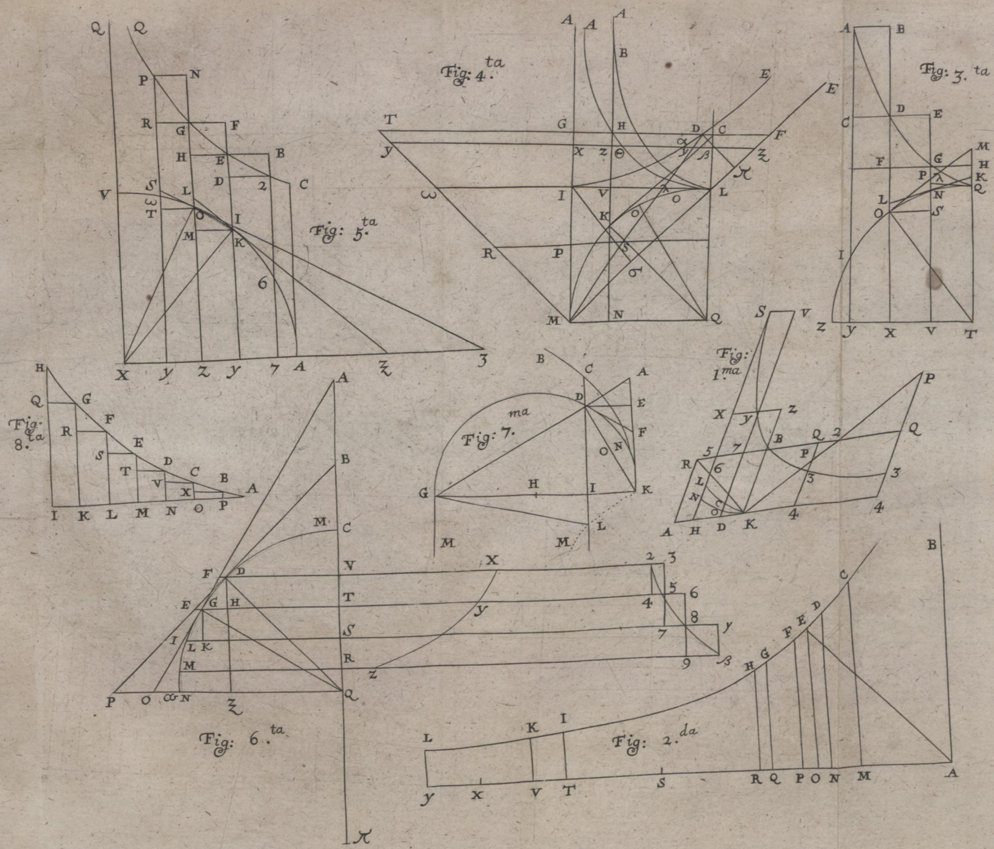
Fig. 8.ta

H Q P Q 3 4

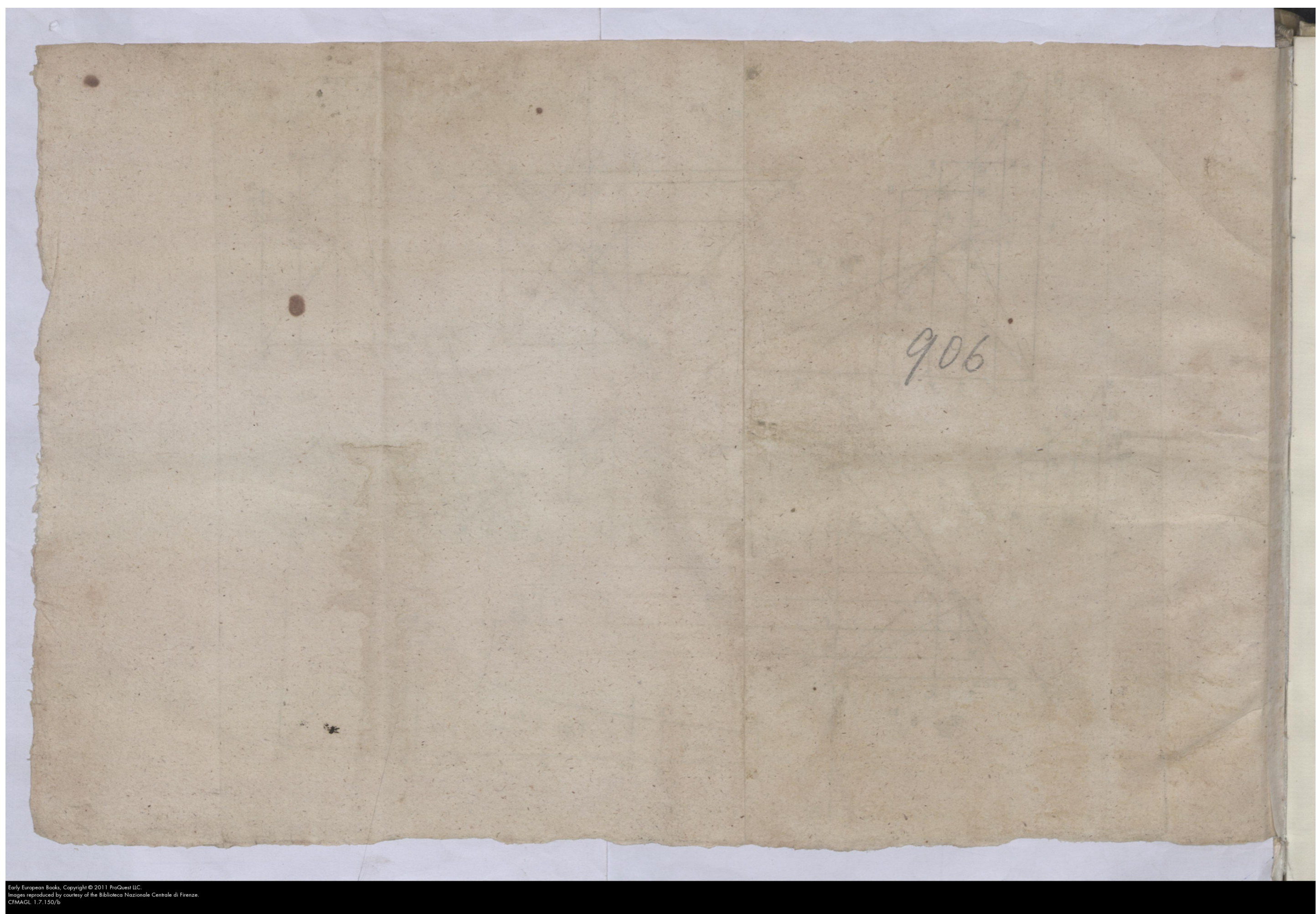
B C M A

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.150/b

170



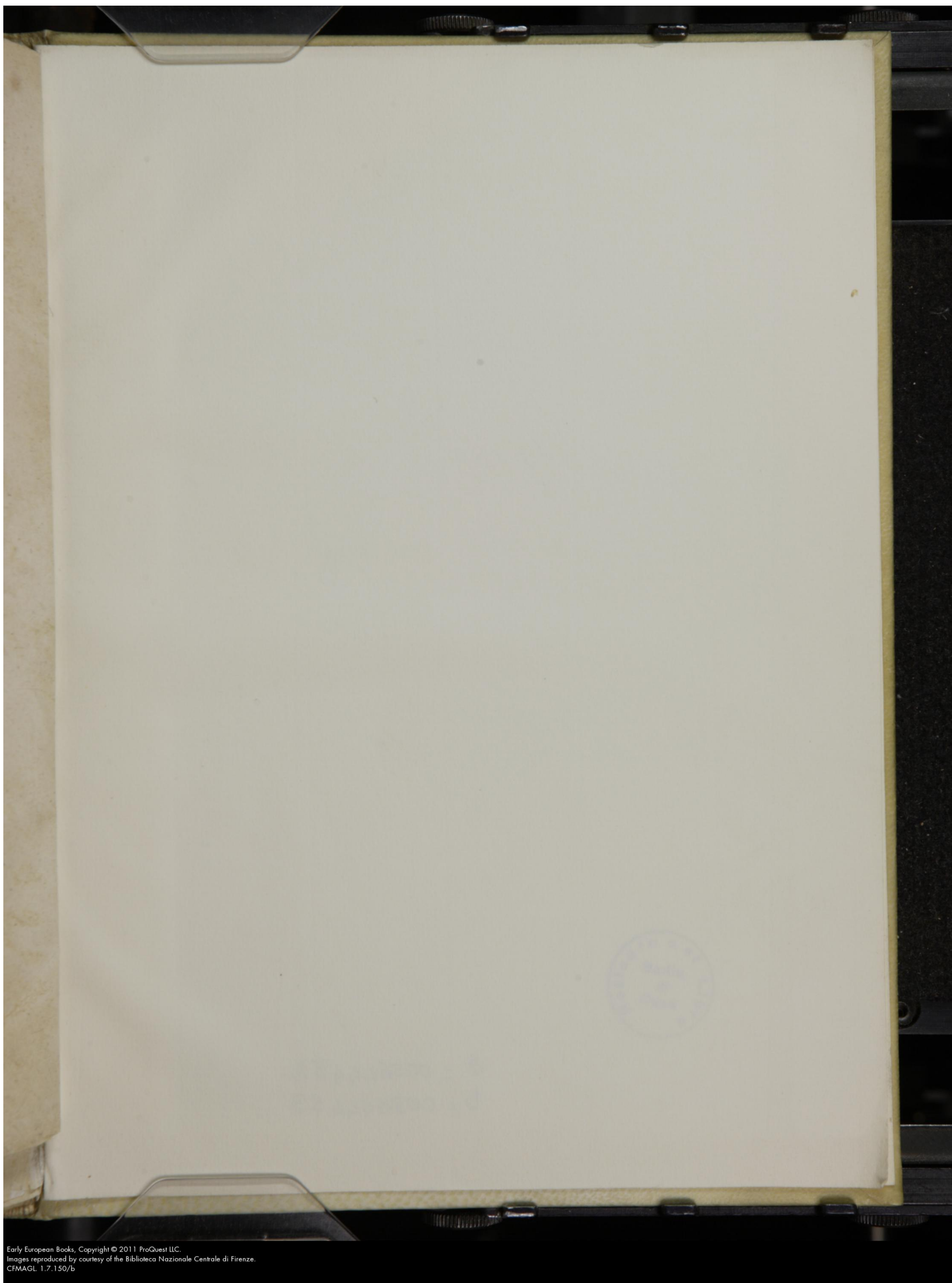
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/b

906

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.150/b



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.150/b

a = 005644452
b = 005644453

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.150/a



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL. 1.7.150/a